

Zur Berechnung nachgiebig zusammengesetzter Biegeträger aus beliebig vielen Einzelquerschnitten

Wolfgang Schelling

1 Einleitung

Nachgiebig zusammengesetzte Biegeträger und Druckstäbe gehören seit altersher zu den gängigen Konstruktionselementen des Holzbaus. Es ist daher verständlich, daß sich eine große Anzahl von Autoren mit der Ergründung der Tragwirkung solcher Bauteile befaßt hat. Das angeführte Schrifttum gibt ohne Anspruch auf Vollständigkeit einen Überblick über wesentliche Arbeiten auf diesem Gebiet [1, 2, 3, 5, 6, 7].

In Deutschland hat insbesondere Möhler [4, 8, 9, 10] in umfangreichen experimentellen und theoretischen Untersuchungen die Grundlagen für eine genauere Erfassung des Tragverhaltens von nachgiebig zusammengesetzten Biegeträgern und Druckstäben geschaffen und durch Einführung des „ γ -Verfahrens“ für zweiteilige und dreiteilige symmetrische Querschnittsformen in die DIN 1052 ein allgemein anerkanntes Berechnungsverfahren vorgegeben. Der Verfasser hat 1968 unter dem Referat von Möhler in [11] auf rechnerischem Wege sowohl mathematisch exakte als auch genäherte Lösungswege für die Berechnung von nachgiebig verbundenen Biegeträgern aus beliebig vielen Einzelquerschnitten vorge-

schlagen und diskutiert. Mit Rücksicht auf die „exakte“ Lösung wurde dabei eine von dem γ -Verfahren abweichende Schreibweise gewählt.

In der vorliegenden Arbeit soll am Beispiel des Biegeträgers auf der Grundlage von [11] nachgewiesen werden, daß sich das γ -Verfahren auch zur Berechnung von Verbundquerschnitten aus beliebig vielen Einzelteilen verallgemeinern läßt. Zum besseren Verständnis werden dabei die elastomechanischen Zusammenhänge nochmals in einer Form angegeben, die unmittelbar zum γ -Verfahren hinführt.

2 Herleitung der Grundgleichungen

Der nachfolgenden Betrachtung wird ein aus m Einzelquerschnitten mit Hilfe nachgiebiger Verbindungsmittel zusammengesetzter Trägerquerschnitt nach *Bild 1* zugrundegelegt. Abmessungen und Materialeigenschaften der Einzelquerschnitte können sich voneinander unterscheiden, müssen jedoch für ein und denselben Querschnitt über die gesamte Trägerlänge konstant bleiben. Alle Verbindungsmittel einer Fuge müssen gleich steif

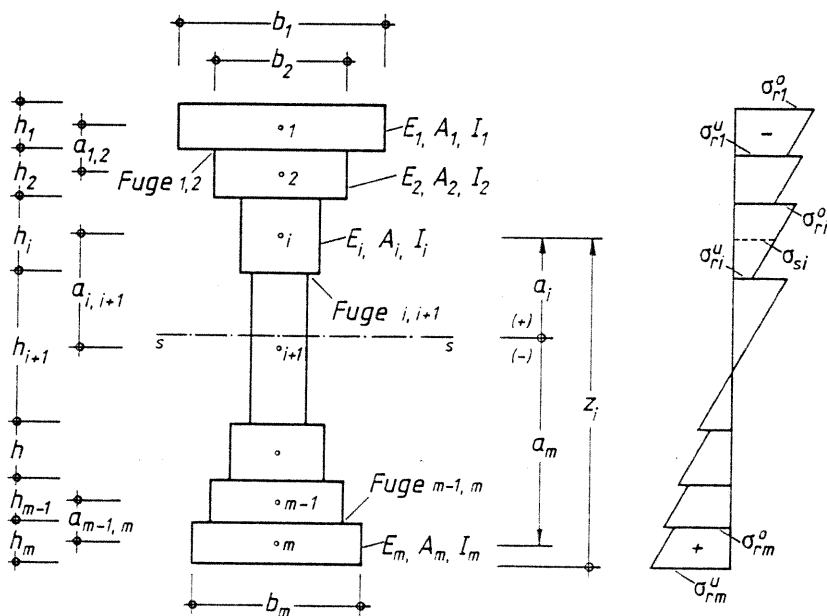


Bild 1: Trägerquerschnitt mit Bezeichnungen und qualitativer Spannungsverteilung

und in regelmäßigen, nicht zu großen Abständen angeordnet sein; Unterschiede von Fuge zu Fuge sind erlaubt. Kraftschlüssige Fugen dürfen rechnerisch nur zwischen jeweils zwei in der Numerierung unmittelbar aufeinander folgenden Einzelquerschnitten berücksichtigt werden. Es wird weiter vorausgesetzt, daß mit ausreichender Genauigkeit sowohl für die Werkstoffe der Einzelquerschnitte als auch für die Verbindungen bzw. Verbindungsmittel voll elastisches Trag- und Verformungsverhalten angenommen werden kann.

Zur Berücksichtigung unterschiedlicher Elastizitätseigenschaften der Einzelquerschnitte wird ein beliebiger Vergleichs-Elastizitätsmodul E_v eingeführt. Die Querschnittsflächen und Flächenmomente 2. Grades der Einzelquerschnitte werden mit Hilfe der Verhältniszahlen

$$n_i = E_i / E_v \quad (2.1)$$

auf diesen Vergleichs-E-Modul bezogen und in der „verzerrten“ Form

$$\bar{A}_i = n_i \cdot b_i \cdot h_i \quad (2.2)$$

und

$$\bar{I}_i = n_i \cdot b_i \cdot h_i^3 / 12 \quad (2.3)$$

in die weitere Berechnung übernommen.

Die geometrische Schwerachse s-s des so definierten Gesamtquerschnitts hat vom unteren Querschnittsrand den Abstand

$$z_s = \sum_{i=1}^m \bar{A}_i \cdot z_i / \sum_{i=1}^m \bar{A}_i \quad (2.4)$$

Die Schwerpunktabstände der Einzelquerschnitte von der Schwerachse s-s ergeben sich zu

$$a_i = z_i - z_s \quad (2.5)$$

und sind im folgenden *vorzeichenbehaftet* weiter zu verwenden.

An einer beliebigen Schnittstelle stehen beim belasteten Träger lt. Bild 2 dem äußeren Biegemoment $M(x)$ jeweils auf die Einzelquerschnitte wirkende innere Normalkräfte $N_i(x)$ und Einzelmomente $M_i(x)$ gegenüber. Das Momentengleichgewicht ergibt

$$\sum_{i=1}^m M_i(x) + \sum_{i=1}^m N_i(x) \cdot a_i = M(x). \quad (2.6)$$

Bei den in der Praxis beim geraden Balken vorkommenden Abmessungen stimmen im Gebrauchslastbereich

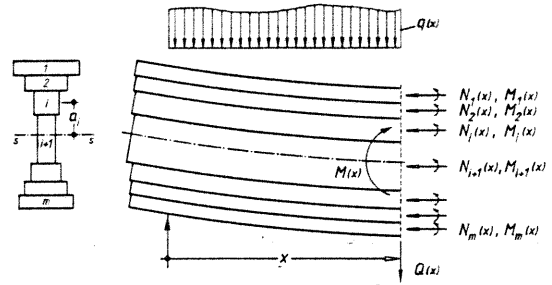


Bild 2: Trägeransicht mit Schnittgrößen

die Durchbiegungen $w_i(x)$ und Krümmungen $w_i'(x)$ aller Einzelquerschnitte mit ausreichender Genauigkeit mit den entsprechenden Werten $w(x)$ und $w''(x)$ der geometrischen Schwerachse überein, so daß nach der klassischen Biegelehre für

$$M_i(x) = -E_v \cdot \bar{I}_i \cdot w''(x) \quad (2.7)$$

gesetzt werden kann. Die auf den Einzelquerschnitt i wirkende und als Druckkraft positiv definierte Normalkraft $N_i(x)$ läßt sich über die zugehörige Normalkraftdehnung $\epsilon_i(x)$ in der Form

$$N_i(x) = -E_v \cdot \bar{A}_i \cdot \epsilon_i(x) \quad (2.8)$$

darstellen. Unter Verwendung von (2.7) und (2.8) folgt aus (2.6) die erste für die weitere Betrachtung wichtige Grundgleichung:

$$E_v \cdot \sum_{i=1}^m \bar{I}_i \cdot w''(x) + E_v \cdot \sum_{i=1}^m \bar{A}_i \cdot \epsilon_i(x) \cdot a_i = -M(x). \quad (2.9)$$

Sie enthält als Unbekannte die Größen $w''(x)$ sowie $\epsilon_i(x)$ aller m Einzelquerschnitte. Zur Beschreibung des Problems sind daher noch m weitere Bestimmungsgleichungen erforderlich.

Bei biegebeanspruchten Trägern mit elastischem Verbund treten infolge der Nachgiebigkeit der Verbindungen zwischen den Einzelquerschnitten Verschiebungen auf, die sich bekanntlich in einer Minderung der Tragfähigkeit gegenüber starrem Verbund auswirken. Unter den getroffenen Voraussetzungen kann davon ausgegangen werden, daß im Gebrauchslastbereich Proportionalität zwischen dem in einer Fuge i, i+1 auf die Verbindungen wirkenden Fugenschubfluß $t(x)$ und den an gleicher Stelle auftretenden Verschiebungen $\delta(x)$ in der Form

$$t_{i,i+1}(x) = \bar{C}_{i,i+1} \cdot \delta_{i,i+1}(x) \quad (2.10)$$

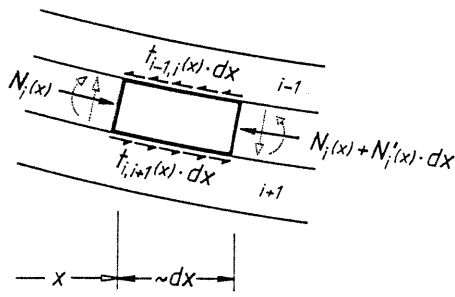


Bild 3: Gleichgewicht am Element eines Einzelquerschnitts

besteht. Die „Fugensteifigkeiten“ \bar{C} können bei den im Holzbau üblichen punktförmigen Verbindungsmitteln mit Hilfe der Verschiebungsmoduln C sowie der maßgebenden Abstände e' entsprechend DIN 1052 für jede Fuge aus

$$\bar{C}_{i,i+1} = C_{i,i+1} / e'_{i,i+1} \quad (2.11)$$

gewonnen werden.

Nach Bild 3 ergibt sich der Zuwachs der Normalkraft eines Einzelquerschnittes unmittelbar aus der Differenz der angrenzenden Fugenschubflüsse zu:

$$N'_i(x) = t_{i,i+1}(x) - t_{i-1,i}(x). \quad (2.12)$$

Mit (2.8) und (2.10) folgt daraus:

$$E_v \cdot \bar{A}_i \cdot \varepsilon'_i(x) + \bar{C}_{i,i+1} \cdot \delta_{i,i+1}(x) - \bar{C}_{i-1,i} \cdot \delta_{i-1,i}(x) = 0. \quad (2.13)$$

Die Änderung der Verschiebung zwischen zwei benachbarten Einzelquerschnitten läßt sich aus Bild 4 über die geometrische Beziehung

$$\delta_{i,i+1}(x) + \Delta_{i+1} = \Delta_i + \delta_{i,i+1}(x) + \delta'_{i,i+1}(x) \cdot dx \quad (2.14)$$

gewinnen. Mit Hilfe der Dehnungen

$$\varepsilon_i^u(x) = \varepsilon_i(x) + \frac{M_i(x)}{E_v \cdot \bar{I}_i} \cdot \frac{h_i}{2} = \varepsilon_i(x) - w''(x) \cdot \frac{h_i}{2} \quad (2.15)$$

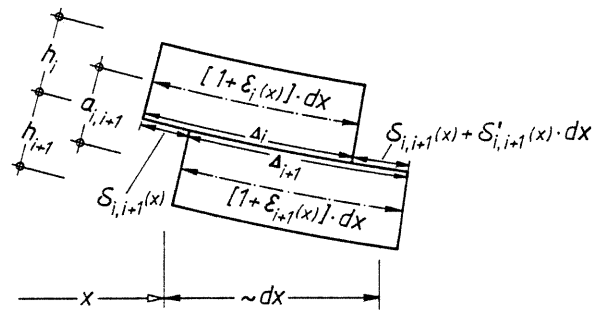


Bild 4: Gegenseitige Verschiebung zweier benachbarter Einzelquerschnitte im belasteten Zustand

am unteren Rand des Querschnitts i und

$$\varepsilon_{i+1}^o(x) = \varepsilon_{i+1}(x) - \frac{M_{i+1}(x)}{E_v \cdot \bar{I}_{i+1}} \cdot \frac{h_{i+1}}{2} = \varepsilon_{i+1}(x) + w''(x) \cdot \frac{h_{i+1}}{2} \quad (2.16)$$

am oberen Rand des Querschnitts i + 1 sowie

$$\Delta_i = [1 + \varepsilon_i^u(x)] \cdot dx, \\ \Delta_{i+1} = [1 + \varepsilon_{i+1}^o(x)] \cdot dx$$

und

$$a_{i,i+1} = (h_i + h_{i+1}) / 2 \quad (2.17a, b, c)$$

erhält man dann aus (2.14):

$$\delta'_{i,i+1}(x) = a_{i,i+1} \cdot w''(x) - \varepsilon_i(x) + \varepsilon_{i+1}(x). \quad (2.18)$$

Durch Einsetzen von (2.18) in die nochmals nach x differenzierte Gl. (2.13) gewinnt man schließlich mit

$$(\bar{C}_{i,i+1} \cdot a_{i,i+1} - \bar{C}_{i-1,i} \cdot a_{i-1,i}) \cdot w''(x) + \bar{C}_{i-1,i} \cdot \varepsilon_{i-1}(x) + E_v \cdot \bar{A}_i \cdot \varepsilon'_i(x) - (\bar{C}_{i,i-1} + \bar{C}_{i,i+1}) \cdot \varepsilon_i(x) + \bar{C}_{i+1,i} \cdot \varepsilon_{i+1}(x) = 0 \quad (2.19)$$

eine weitere wesentliche Verknüpfung zwischen Trägerkrümmung und Mittendehnungen der Einzelquerschnitte. Da diese Beziehung für jeden der m Einzelquerschnitte gesondert angeschrieben werden kann, steht nunmehr zusammen mit Gl. (2.9) ein gekoppeltes Differentialgleichungssystem zur Verfügung, aus welchem die m + 1 Unbekannten w(x) und $\varepsilon_i(x)$ eindeutig bestimmbar sind.

3 Lösung für den Einfeldträger unter sinusförmiger Belastung

Das aus den Gln. (2.9) und (2.19) resultierende Differentialgleichungssystem ist für alle Trägersysteme, bei denen sich Belastungen, Schnittgrößen und Randbedingungen durch Fourier-Reihenentwicklungen beschreiben lassen, lösbar (s. auch [11]). Als Grundlage hierfür und zur Abschätzung der Verhältnisse für einfache Belastungsarten mit näherungsweise sinusförmigem Momentenverlauf (wie z. B. dem Einfeldträger unter Gleichstreckenlast) wird nachfolgend der Lösungsweg für eine sinusförmige Belastung der Form

$$q(x) = q \cdot \sin \frac{\pi}{l} x \quad (3.1)$$

entsprechend Bild 5 aufgezeigt.

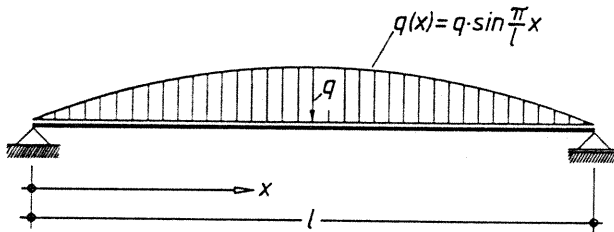


Bild 5: Einfeldträger unter sinusförmiger Belastung

Mit den zugehörigen Querkraften

$$Q(x) = \frac{q \cdot l}{\pi} \cdot \cos \frac{\pi}{l} x = Q \cdot \cos \frac{\pi}{l} x \quad (3.2)$$

und Biegemomenten

$$M(x) = \frac{q \cdot l^2}{\pi^2} \cdot \sin \frac{\pi}{l} x = M \cdot \sin \frac{\pi}{l} x \quad (3.3)$$

sowie den Lösungsansätzen

$$\varepsilon_i(x) = -\frac{M}{E_v \cdot ef I} \cdot \gamma_i \cdot a_i \cdot \sin \frac{\pi}{l} x \quad (3.4)$$

$$\varepsilon'_i(x) = -\frac{Q}{E_v \cdot ef I} \cdot \gamma_i \cdot a_i \cdot \cos \frac{\pi}{l} x \quad (3.5)$$

$$\varepsilon''_i(x) = +\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \cdot \frac{Q}{E_v \cdot ef I} \gamma_i \cdot a_i \cdot \sin \frac{\pi}{l} x \quad (3.6)$$

$$w(x) = \frac{M \cdot l^2}{\pi^2 E_v \cdot ef I} \cdot \sin \frac{\pi}{l} x \quad (3.7)$$

$$w''(x) = -\frac{M}{E_v \cdot ef I} \cdot \sin \frac{\pi}{l} x \quad (3.8)$$

läßt sich das Differentialgleichungssystem (2.9) und (2.19) in ein lineares Gleichungssystem überführen und mit üblichen Methoden auflösen. In den Gleichungen (3.1) bis (3.8) bedeuten Q und M die Maximalwerte der Schnittgrößen, γ_i zunächst noch unbekannte „Nachgiebigkeitsfaktoren“ und $ef I$ ein ebenfalls noch unbekanntes „wirksames Flächenmoment 2. Grades“ des Gesamtquerschnitts. Durch Einsetzen der Gln. (3.3), (3.4) und (3.8) in Gl. (2.9) erhält man unmittelbar:

$$ef I = \sum_{i=1}^m \bar{I}_i + \sum_{i=1}^m \gamma_i \cdot \bar{A}_i \cdot a_i^2 \quad (3.9)$$

Aus Gl. (2.19) wird mit den Ansätzen (3.4), (3.6) und (3.8):

$$\begin{aligned} & -\bar{C}_{i-1,i} \cdot a_{i-1} \cdot \gamma_{i-1} + (\bar{C}_{i-1,i} + \bar{C}_{i,i+1} \\ & + \frac{\pi^2}{l^2} \cdot E_v \cdot \bar{A}_i) \cdot a_i \cdot \gamma_i - \bar{C}_{i,i+1} \cdot a_{i+1} \cdot \gamma_{i+1} \\ & = \bar{C}_{i,i+1} \cdot a_{i,i+1} - \bar{C}_{i-1,i} \cdot a_{i-1,i} \end{aligned} \quad (3.10)$$

Da sich Gl. (3.10) wiederum für jeden Einzelquerschnitt gesondert aufstellen läßt, ergibt sich mit den Abkürzungen

$$v_{i,i-1} = -\bar{C}_{i-1,i} \cdot a_{i-1} \quad (3.11)$$

$$v_{i,i} = (\bar{C}_{i-1,i} + \bar{C}_{i,i+1} + \frac{\pi^2}{l^2} \cdot E_v \cdot \bar{A}_i) \cdot a_i \quad (3.12)$$

$$v_{i,i+1} = -\bar{C}_{i,i+1} \cdot a_{i+1} \quad (3.13)$$

$$s_i = \bar{C}_{i,i+1} \cdot a_{i,i+1} - \bar{C}_{i-1,i} \cdot a_{i-1,i} \quad (3.14)$$

das lineare Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} v_{1,1} & v_{1,2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ v_{2,1} & v_{2,2} & v_{2,3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & v_{i,i-1} & v_{i,i} & v_{i,i+1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & v_{m-1,m-2} & v_{m-1,m-1} & v_{m-1,m} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & v_{m,m-1} & v_{m,m} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \cdot \\ \gamma_i \\ \cdot \\ \gamma_{m-1} \\ \gamma_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \cdot \\ s_i \\ \cdot \\ s_{m-1} \\ s_m \end{bmatrix}, \quad (3.15)$$

aus welchem sich die Nachgiebigkeitsfaktoren γ_i für alle Einzelquerschnitte bestimmen lassen. Fällt dabei die Schwerachse eines Einzelquerschnittes i mit der geometrischen Schwerachse $s-s$ des Gesamtquerschnitts zusammen, dann wird das Diagonalglied $v_{i,i}$ der Matrix zu Null, was insbesondere bei zur Achse $s-s$ unsymmetrischen Gesamtquerschnitten bei der zahlenmäßigen Durchrechnung zu unbestimmten Ausdrücken führen kann. Es empfiehlt sich, in solchen Fällen a_i nicht exakt mit 0 sondern in der Größenordnung von $\text{ca. } 0,001 \cdot h_i$ anzusetzen.

Mit Kenntnis der „Nachgiebigkeitsfaktoren“ γ_i und des „wirksamen Flächenmomentes 2. Grades“ $\text{ef } I$ lassen sich nun alle weiteren für die Bemessung eines nachgiebig verbundenen Trägers wichtigen Größen ermitteln. Aus Gl. (3.2) folgt für die Normalkraftdehnung der Einzelquerschnitte in Trägermitte

$$\varepsilon_i = -\frac{M}{E_v \cdot \text{ef } I} \cdot \gamma_i \cdot a_i \quad (3.16)$$

und daraus mit (2.1) und

$$\sigma_{si} = E_i \cdot \varepsilon_i \quad (3.17)$$

für die maßgebenden Schwerpunktspannungen der Einzelquerschnitte:

$$\sigma_{si} = -\frac{M}{\text{ef } I} \cdot \gamma_i \cdot a_i \cdot n_i. \quad (3.18)$$

Die zugehörigen Dehnungen am oberen bzw. unteren Rand der Einzelquerschnitte ergeben sich aus den Gln. (2.15) und (2.16) in Verbindung mit den Gln. (3.8) und (3.18) zu

$$\varepsilon_i^{o,u} = -\frac{M}{E_v \cdot \text{ef } I} \cdot \left(\gamma_i \cdot a_i \pm \frac{h_i}{2} \right) \quad (3.19)$$

und die entsprechenden Biegerandspannungen mit (2.1) und (3.19) zu:

$$\sigma_{ri} = -\frac{M}{\text{ef } I} \cdot \left(\gamma_i \cdot a_i \pm \frac{h_i}{2} \right) \cdot n_i. \quad (3.20)$$

Zur Berücksichtigung des Einflusses evtl. vorhandener Querschnittsschwächungen sind die Gln. (3.18) und (3.20) bei einer praktischen Berechnung in Anlehnung an Abschn. 5.4.1 der DIN 1052 in der Form

$$\sigma_{si} = -\frac{M}{\text{ef } I} \cdot \gamma_i \cdot a_i \cdot n_i \cdot \frac{A_i}{A_{in}} \quad (3.21)$$

und

$$\sigma_{ri} = -\frac{M}{\text{ef } I} \cdot \left(\gamma_i \cdot a_i \cdot \frac{A_i}{A_{in}} \pm \frac{h_i}{2} \cdot \frac{I_i}{I_{in}} \right) \cdot n_i \quad (3.22)$$

zu verwenden. Der von den Verbindungsmitteln einer beliebigen Fuge $i, i+1$ aufzunehmende Schubfluß ergibt sich aus Gl. (2.12) durch Addition aller oberhalb der betrachteten Fuge auftretenden Normalkraftänderungen mit Gl. (2.8) zu

$$t_{i,i+1}(x) = \sum_{j=1}^i N_j'(x) = \sum_{j=1}^i \varepsilon_j'(x) \cdot E_v \cdot \bar{A}_j. \quad (3.23)$$

Unter Verwendung von Gl. (3.5) folgt daraus mit dem „wirksamen Flächenmoment 1. Grades“ aller oberhalb der Fuge $i, i+1$ liegenden Einzelquerschnitte

$$\text{ef } S_{i,i+1} = \sum_{j=1}^i \gamma_j \cdot \bar{A}_j \cdot a_j \quad (3.24)$$

für den maximalen Schubfluß im Auflagerbereich

$$t_{i,i+1} = \frac{Q}{\text{ef } I} \cdot \text{ef } S_{i,i+1}. \quad (3.25)$$

Die Schubspannungen in Einzelquerschnitten ohne Vorzeichenwechsel der Biegespannung können unmittelbar aus dem größten angrenzenden Fugenschubfluß ermittelt werden. Bei Vorzeichenwechsel der Biegespannung

erhält man die maximale Schubspannung in Höhe der Spannungsnulllinie zu

$$\max \tau_i = \frac{Q}{b_i \cdot e f I} \cdot e f S_i \quad (3.26)$$

mit

$$e f S_i = e f S_{i-1} + \left(\gamma_i \cdot a_i + \frac{h_i}{2} \right)^2 \cdot \frac{b_i}{2} \cdot n_i \quad (3.27)$$

In Gl. (3.27) beschreibt der zweite Summand den aus dem oberhalb der Spannungsnulllinie im Querschnitt i liegenden Biegespannungskeil resultierenden Zuwachs der Schubspannung.

Die maximale Durchbiegung in Trägermitte ergibt sich unmittelbar aus Gl. (3.7) zu

$$\max w = \frac{M \cdot l^2}{\pi^2 \cdot e f I} \quad (3.28)$$

4 γ -Werte für spezielle Querschnitte

In der bisherigen Betrachtung wurde davon ausgegangen, daß sich die Steifigkeiten der Verbindungsfugen eines nachgiebig zusammengesetzten Trägerquerschnitts von Fuge zu Fuge beliebig unterscheiden können.

In vielen praktischen Fällen lassen sich durch geeignete Wahl und Anordnung der Verbindungsmittel die Fugensteifigkeiten derart aufeinander abstimmen, daß für jede Fuge $i, i+1$ mit

$$S_{1,2} = \bar{A}_1 \cdot a_1 \quad \text{und} \quad S_{i,i+1} = \sum_{j=1}^i \bar{A}_j \cdot a_j$$

die in [11] angegebene Bedingung

$$\bar{C}_{i,i+1} = \bar{C}_{1,2} \cdot \frac{S_{i,i+1}}{S_{1,2}} \cdot \frac{a_{1,2}}{a_{i,i+1}} \quad (4.1)$$

eingehalten wird. Unter dieser Voraussetzung nehmen die Nachgiebigkeitsfaktoren für alle Einzelquerschnitte mit

$$k = \frac{\pi^2 \cdot E_v \cdot \bar{A}_1 \cdot a_1}{l^2 \cdot \bar{C}_{1,2} \cdot a_{1,2}} \quad (4.2)$$

den gleichen Wert

$$\gamma_1 = \gamma_2 = \dots = \gamma_i = \dots = \gamma_m = \frac{1}{1+k} \quad (4.3)$$

an, was eine wesentliche Vereinfachung der Berechnung bewirkt. Zweiteilige und symmetrische dreiteilige Querschnitte erfüllen die Bedingung (4.1) automatisch, wobei der k -Wert nach Gl. (4.2) beide Querschnittsformen erfaßt.

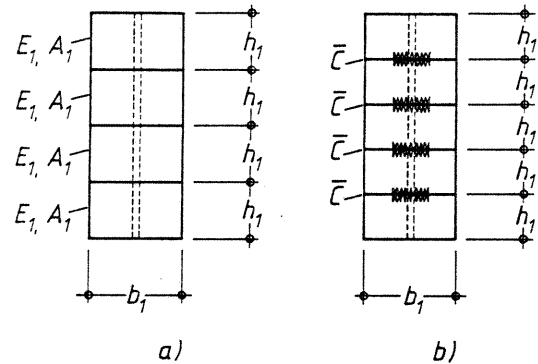


Bild 6: Vierteiliger (a) und fünfteiliger (b) verdübelter Balken mit Stabdübeln oder Dübeln besonderer Bauart entsprechend DIN 1052, Blatt 2

Für Querschnitte, bei denen aus konstruktiven Gründen die Einhaltung der Bedingung (4.1) nicht möglich ist, kann die Ausnutzung von Symmetrieeigenschaften zu Vereinfachungen führen. So erhält man z. B. für verdübelte Balken nach Bild 6 mit gleichgroßen Einzelquerschnitten $A_1 = b_1 \cdot h_1$, einheitlichen Elastizitätszahlen E und in allen Fugen gleich großen Fugensteifigkeiten \bar{C} mit der Abkürzung

$$K = 1 + \frac{\pi^2 \cdot E \cdot A_1}{l^2 \cdot 2 \cdot \bar{C}} \quad (4.4)$$

bei 4 Teilen entsprechend Bild 6a:

$$\gamma_2 = \gamma_3 = \frac{1}{2 \cdot K^2 - 1} \quad (4.5)$$

$$\gamma_1 = \gamma_4 = (2K + 1) \cdot \gamma_2 / 3 \quad (4.6)$$

und bei 5 Teilen entsprechend Bild 6b:

$$\gamma_2 = \gamma_4 = \frac{K^2 + K/2 - 1/4}{4 \cdot K^4 - 3 \cdot K^2 + 4} \quad (4.7)$$

$$\gamma_1 = \gamma_5 = K \cdot \gamma_2 \quad (4.8)$$

(γ_3 wird nicht benötigt).

Vergleichsrechnungen haben gezeigt, daß sich die Nachgiebigkeitsfaktoren γ_1 und γ_2 entsprechend den Gl. (4.4) bis (4.8) bei „steifem“ Verbund nur unwesentlich, bei „weichem“ Verbund dagegen erheblich voneinander unterscheiden. Da sich schon kleine Änderungen der γ -Werte bei manchen Querschnittsformen stark vergrößert in den Biege- und Randspannungen widerspiegeln können, muß mit Ausnahme von zumindest annähernd der Bedingung (4.1) genügenden Fällen in der Regel bei Biegeträgern von der Anwendung gemittelter und für alle Einzelquerschnitte gleicher Nachgiebigkeitsfaktoren, wie sie bei der Druckstabberechnung [12] berechtigt sein mögen, abgesehen werden.

5 Schlußbemerkungen

Die eingangs entwickelten Grundgleichungen beschreiben unter den getroffenen Voraussetzungen in allgemeiner Form das elastische Verhalten weitgehend beliebig zusammengesetzter Verbundquerschnitte unter Biegebeanspruchung.

Der für eine sinusförmige Belastung aufgezeigte Lösungsweg führt auch bei komplizierteren Last- und Trägerformen zu einem rechnerisch beliebig genauen Ergebnis, wenn sich Belastung und Lösungsansätze unter Beachtung der Randbedingungen in Fourier-Reihen entwickeln lassen. Die Nachgiebigkeitsfaktoren γ_i , das „wirksame Flächenmoment 2. Grades“ ef I sowie alle erforderlichen Kraft- und Weggrößen sind dabei für je-

des Glied der Belastungsreihe getrennt zu ermitteln, wobei als maßgebende Trägerlänge l in die Gl. (3.12), (4.2) bzw. (4.4) die halbe Wellenlänge des betrachteten Belastungsgliedes einzuführen ist. Die endgültigen Beanspruchungen und Verformungen ergeben sich dann aus der Summe der Einzelwerte.

Im Hinblick auf die bei Holz, Holzwerkstoffen und Holzverbindungen vorhandenen starken Streuungen der Elastizitäts- und Steifigkeitsziffern erscheint eine solche „genauere“ Berechnung nur in Sonderfällen sinnvoll. Insbesondere für den in der Praxis am häufigsten vorkommenden Fall des Einfeldträgers unter Gleichstreckenlast sowie für andere Lastfälle mit annähernd sinusförmiger Momentenlinie genügt es in der Regel, sich auf das erste Glied der Reihenentwicklung zu beschränken und darüber hinaus anstelle der Schnittgrößen-Amplituden nach den Gl. (3.2) und (3.3) für Q und M in den Gl. (3.18) bis (3.26) die jeweiligen Maximalwerte $\max Q$ und $\max M$ aus der tatsächlichen Belastung zu verwenden. Die Abschätzung von Verformungen kann dann nach den vom starr verbundenen Träger her bekannten Beziehungen unter Berücksichtigung der „wirksamen Biegesteifigkeit“ $E_y \cdot ef$ I erfolgen.

Damit stellen die in Abschn. 3 und 4 für eine sinusförmige Belastung streng gültigen Lösungen eine Verallgemeinerung des „ γ -Verfahrens“ dar, mit deren Hilfe aus beliebig vielen Einzelquerschnitten zusammengesetzte, nachgiebig verbundene Biegeträger DIN-konform berechnet werden können.

Schrifttum

- [1] Stüssi, F.: Über den verdübelten Balken. Schweizerische Bauzeitung, Band 122 (1943) H. 21, S. 271/274.
- [2] Stüssi, F.: Zusammengesetzte Vollwandträger. Abhandlungen der Internationalen Vereinigung für Brückenbau, 8. Band (1947) S. 249/269.
- [3] Granholm, H.: Om sammansatta balkar och pelare med särskild hänsyn till spikade träkonstruktioner. Gumperts förlag, Göteborg 1949.
- [4] Steinhart, O. und K. Möhler: Versuche mit zusammengesetzten genagelten I-Holzbiegeträgern. Dt. Zimmermeister 53 (1951) H. 7, S. 4/10.
- [5] Lombardi, G.: Der zusammengesetzte Druckstab aus Holz. Schweizerische Bauzeitung 69 (1951) H. 22, S. 301/303.
- [6] Pleškov, P. F.: Teorija rasčeta derevannyh sostavnyh steržney. Moskau 1952.
- [7] Hoischen, A.: Beitrag zur Berechnung zusammengesetzter Vollwandträger mit elastischen Verbindungsmitteln. Dissertation TH Karlsruhe 1952.
- [8] Möhler, K.: Biege- und Knickversuche an Stützen mit zusammengesetzten, kontinuierlich vernagelten Holzquerschnitten. Fortschritte und Forschungen im Bauwesen, Reihe D, Heft 20, 1955.
- [9] Möhler, K.: Über das Tragverhalten von Biegeträgern und Druckstäben mit zusammengesetztem Querschnitt und nachgiebigen Verbindungsmitteln. Habilitation TH Karlsruhe 1956.
- [10] Möhler, K.: Die Bemessung der Verbindungsmittel bei zusammengesetzten Biege- und Druckgliedern im Holzbau. Bauen mit Holz 68 (1966) S. 162/164.
- [11] Schelling, W.: Die Berechnung nachgiebig verbundener, zusammengesetzter Biegeträger im Ingenieurholzbau. Dissertation TH Karlsruhe 1968.
- [12] Larsen, H. J.: The Design of Built-up Timber Columns. International council for building research, studies and documentation, Delft, June 1974.